Formulario di Meccanica

28 giugno 2007

1 Cinematica

1.1 Teorema di Rivals

Velocità di un punto B che si muove di moto circolare attorno al centro di istantanea rotazione C:
$\vec{V}_B = \omega \wedge (B - C)$

1.1.1 Per le velocità

$\vec{V} = \vec{V}^{(t)} + \vec{V}^{(r)}$

$\vec{V}^{(t)}$ **velocità di trascinamento:** velocità a cui si muove la terna mobile rispetto al sistema di riferimento fisso.

$\vec{V}^{(r)}$ **velocità relativa:** velocità a cui si muove il punto rispetto alla terna relativa

1.1.2 Per le accelerazioni

$\vec{a} = \vec{a}^{(t)} + \vec{a}^{(r)}$

$\vec{a}^{(t)}$ **accelerazione di trascinamento** accelerazione della terna mobile rispetto al sistema di riferimento fisso

$\vec{a}^{(t)} = \vec{a}_{\Omega}^{(t)} + \vec{a}^{(t,tg)} + \vec{a}^{(t,n)}$

$\vec{a}_{\Omega}^{(t)}$**:** accelerazione di Ω, origine della terna mobile, rispetto al sistema di riferimento fisso

$\vec{a}^{(t,tg)} = \dot{\omega} \wedge (\overline{\Omega P})$**:** accelerazione della terna mobile ruotante. Componente tangente.

$\overline{\Omega P}$**:** distanza del punto dall'origine della terna mobile

$\vec{a}^{(t,n)} = \omega^2 (\overline{\Omega P})$**:** accelerazione della terna mobile ruotante. Componente normale

$\vec{a}^{(r)}$ **accelerazione relativa:** accelerazione del punto rispetto alla terna relativa

Teorema di Coriolis Si applica nel caso in cui la terna relativa è ruotante. Prevede la presenza, oltre che di un'accelerazione di trascinamento e una relativa, di un'altra componente, $\vec{a}^{(c)}$.
$\vec{a} = \vec{a}^{(t)} + \vec{a}^{(r)} + \vec{a}^{(c)}$

$\vec{a}^{(c)} = 2\omega \wedge V_r$ **accelerazione complementare di Coriolis:** presente solo in caso di terna relativa ruotante. La direzione e verso dipendono dal prodotto vettoriale di ω(vettore uscente dal piano se la rotazione è antioraria e entrante nel piano se la rotazione è oraria) e V_r, e si trovano con la regola della mano destra.
NB: V_r è la velocità relativa del punto di cui si sta calcolando l'accelerazione.

2 Dinamica

2.1 Momento d'inerzia di Massa $[kg \cdot m^2]$

Indica come è distrubuita la massa di un corpo e viene calcolato rispetto ad assi perpendicolari al piano direttore. Il momento d'inerzia di massa rispetto ad un generico asse O è definito come:

$$J_O = \int_V r^2 dm$$

cioè come l'integrale su tutto il volume V del corpo di r (=distanza da O) al quadrato moltiplicato per l'unità infinitesima di massa m.

Nel caso di corpi omogenei di spessore costante h, si può riscrivere

$$J_O = \rho h \int_A r^2 dA$$

con ρ=densità e A=area del corpo.

Generalmente si utilizza come asse di riferimento quello passante per il baricentro G, e si calcola quindi il momento d'inerzia baricentrale J_G a partire dal quale si può ricavare J_O con O qualunque tramite la *legge del trasporto*.

2.1.1 Alcuni momenti d'inerzia baricentrici

Di una corona circolare generica $J_G = M\frac{R_2^2+R_1^2}{2}$ con M= massa e R_1, R_2= raggio interno ed esterno.

Di un disco pieno $J_G = \frac{1}{2}MR^2$

Di un anello sottile ($R_1 = R_2$) $J_G = MR^2$

Di un'asta $J_G = \frac{ML^2}{12}$ con L= lunghezza dell'asta.

Di un rettangolo omogeneo $J_G = \frac{M}{12}(L^2 + b^2)$ con b= altezza del rettangolo.

2.2 Equilibrio dinamico

2.2.1 Per un punto (Principio di D'Alembert)

Un punto è in equilibrio dinamico se

$$\sum F + F_{IN} = 0$$

cioè se la somma delle effettive forze esistenti agenti sul sistema sommata alla forza d'inerzia F_{IN}è uguale a 0, con

$$F_{IN} = -m \cdot a$$

con m=massa del punto e a=accelerazione del punto.

2.2.2 Per un corpo rigido

Per un corpo rigido, la forza d'inerzia risultante da tutte le azioni di forza che agiscono su di esso è

$$R_{IN} = -M \cdot a_G$$

con M=massa totale del corpo e a_G=accelerazione del baricentro.

Bisogna considerare anche le coppie d'inerzia. Scegliendo G come polo, la *coppia d'inerzia* risultante è data da

$$M_{IN} = -J_G \cdot \ddot{\theta}\mathbf{k}$$

con J_G=momento d'inerzia baricentrale, $\ddot{\theta}$=accelerazione angolare del corpo, $\mathbf{k}$=versore perpendicolare uscente al piano in cui si muove il corpo.

L'equilibrio dinamico si ha per

$$\begin{cases} R + R_{IN} = 0 \\ M_O^* + M_{IN} + (G - O) \wedge R_{IN} = 0 \end{cases}$$

con R=risultante delle forze agenti sul corpo e M_O^*=momento complessivo delle coppie e forze agenti sul corpo.

Bilancio di potenze L'equilibrio dinamico può essere calcolato anche tramite l'equazione del bilancio di potenze:

$$\sum W + \sum W_i = 0$$

o, più precisamente:

$$W_m + W_p + W_r = -W_i$$

con W_m potenza *motrice*, W_p potenza *persa* a causa di inefficienze, W_r potenza *resistente* originata da attriti, W_i potenza *d'inerzia*.

La formula è valida in generale quindi, ad esempio, allo spunto. Nel caso "a regime", invece, scompaiono tutti i contributi inerziali perchè le accelerazioni e le $\dot{\omega}$ sono nulle. Si ha quindi $W_m + W_p + W_r = 0$.

Ogni elemento W ha la forma di una somma di

$$W = \text{coppia} \times \text{velocità angolare} = \text{momento d'inerzia di massa} \cdot \text{accelerazione} \times \text{velocità angolare}$$

oppure di

$$W = \text{forza} \times \text{velocità}$$

o di elementi di entrambi i tipi.

In particolare, W_m è la potenza prodotta dal motore ed è generalmente espressa come

$$W_m = \vec{C_m} \times \vec{\omega_m}$$

con C_m=coppia del motore e ω_m=numero di giri del motore.

Nel caso di moto diretto, $W_m = C_m\omega_m$

Nel caso di moto retrogrado, la coppia è in direzione opposta alla rotazione dell'albero motore, quindi $W_m = -C_m\omega_m$.

W_p è la potenza persa a causa di inefficienze nella trasmissione. Detto η il rendimento della trasmissione, si ha

$$W_p = -(1-\eta)W_e$$

con W_e=potenza entrante nella trasmissione. Con moto diretto (cioè con la potenza che fluisce nella trasmissione dal lato motore al lato utilizzatore) W_e è uguale a W_m (in condizioni ideali), oppure a W_m sommato (rispettivamente, sottratto) al contributo di un volano ($J_m\dot{\vec{\omega_m}} \times \vec{\omega_m}$), se questo si trova tra la trasmissione e il motore (rispettivamente, al di là del motore, per modellizzarne il contributo d'inerzia). J_m è il momento d'inerzia di massa del volano.
In condizioni di moto retrogrado (cioè con la potenza che fluisce nella trasmissione dal lato utilizzatore al lato motore) W_e è pari alla somma dei contributi di tutte le potenze a valle della trasmissione (quelle dovute a forze e coppie d'*inerzia* prese con *segno negativo*, quelle *resistenti* con *segno positivo*).

W_r è la potenza resistente. E' formata da un contributo per ogni elemento dotato di massa non trascurabile non direttamente appoggiato al terreno, e quindi suscettibile di movimento a causa della forza peso. Ogni contributo è dato dalla forza peso del corpo ($P = m \times g$, con g = accelerazione di gravità $= 9.8\frac{m}{s^2}$) moltiplicata scalarmente ($\times$) per la velocità a cui si muove. All'interno di W_r è necessario considerare anche i contributi forniti dall'attrito volvente, come indicato nella sezione 3.2.

$-W_{in}$ è la potenza d'inerzia ed è formata da più contributi. In particolare, per ogni corpo traslante dotato di massa, da un contributo del tipo $\vec{F_{IN}} \times \vec{v_g} = m \cdot \vec{a_g} \times \vec{v_g}$ (prodotto scalare della forza d'inerzia per la velocità del baricentro) e per ogni corpo ruotante da un contributo $\vec{C_{IN}} \times \vec{\Omega} = J_G\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{\Omega}$, dove J_G è il momento d'inerzia di massa e $\vec{\Omega}$ la velocità di rotazione. Se un corpo ruota e trasla allo stesso tempo, sono presenti entrambi i suoi contributi.

3 Attriti

3.1 Verificare l'aderenza

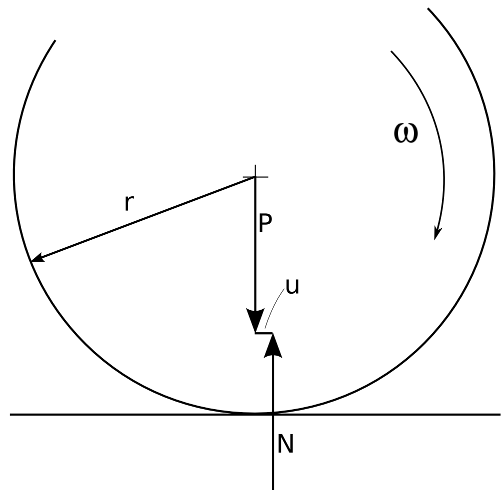
Per verificare l'aderenza (nel caso di una ruota, che sia vera l'ipotesi di puro rotolamento, cioè che non ci sia trascinamento) dobbiamo verificare che

$$|\vec{T}| \leq f \cdot |\vec{N}|$$

cioè che $\frac{T}{N} \leq f$ con f=coefficiente di attrito statico e T e N, rispettivamente, forza tangente e normale alla superficie di contatto tra i due corpi.

3.2 Attrito volvente

E' l'attrito che si presenta quando un corpo sta rotolando a contatto con il terreno.



La reazione verticale N (pari a $P = mg$, ma in verso opposto) si sposta in avanti generando una coppia che è necessario vincere $C = Nu$. Compare quindi un nuovo contributo alla potenza resistente pari a

$$W_r = C\omega = Nu\omega = Nu\omega\frac{r}{r} = N\left(\frac{u}{r}\right)(\omega r) = Pf_v v$$

dove $P = N$, $f_v = \frac{u}{r}$, $v = \omega r$.

4 Vibrazioni

Le vibrazioni di un sistema in cui siano presenti corpi dotati di massa collegati al terreno tramite molle e/o smorzatori (o elementi modellizzabili come tali) possono essere studiate in modo semplice ottenendo un sistema equivalente formato da una sola massa $M*$(massa equivalente), una sola molla $k*$(coefficiente di elasticità del sistema equivalente) e un solo smorzatore $c*$(coefficiente di smorzamento del sistema equivalente).

Tali valori possono essere ottenuti calcolando l'equilibrio dei momenti di un corpo qualsiasi del sistema (la scelta è indifferente perchè, tra le forze considerate, ve ne saranno alcune ignote, il cui valore dovrà essere ottenuto calcolando, ricorsivamente, l'equilibrio degli altri corpi del sistema) rispetto ad un polo O: $\sum M_O = 0$. Si otterrà così un'equazione del tipo:

$$M * \ddot{x} + c * \dot{x} + k * x = 0$$

dove x è una variabile che indica lo spostamento del sistema dalla posizione di equilibrio (può trattarsi sia di uno spostamento lineare, sia di un angolo. La scelta deve essere dettata dalla semplicità dei conti).

Risulta quindi possibile calcolare la pulsazione propria del sistema $\omega = \sqrt{\frac{k*}{M*}}$ e il suo smorzamento critico $c_c = 2\sqrt{k * \cdot M*}$.

Il contributo della forza peso viene ignorato nel calcolo dell'equilibrio, perchè si parte dalla condizione di equilibrio statico, in cui l'effetto del peso è già considerato (e si limita a cambiare il punto di equilibrio di un valore costante).

4.1 Collegamenti di più molle

Si possono modellizzare con un'unica molla con coefficiente $k_{equivalente}$ che dipende dal tipo di collegamento

4.1.1 In serie

$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

4.1.2 In parallelo

$k_{eq} = k_1 + k_2$